APUNTES SOBRE INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

Probabilidad es el experimento libre de determinación

$$P = \frac{X}{n} * 100$$

Reyes Donis, José Luis

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

Probabilidad es el estudio de experimentos aleatorios o libres de determinación, aleatorio = no interviene el criterio humano.

1. Conceptos básicos

a) Experimento

Es una acción mediante la cual se obtiene un resultado. En un experimento probabilístico, al azar o aleatorio se desconoce si un evento ocurrirá o no ocurrirá, si se tiene la certeza que ocurrirá su probabilidad es 1 o 100%, si se tiene la certeza que no ocurrirá su probabilidad es 0 o 0%.

b) Espacio muestral

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, por ejemplo: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior, entonces el espacio muestral consiste en los seis números posibles, estos son: 1, 2, 3, 4, 5, 6; y punto muestral uno de los resultados posibles.

c) Evento o suceso

Resultado de un experimento, que está dado por:

$$\boxed{P = \frac{X}{n} * 100}$$

Fórmula 37

Donde:
P = Probabilidad; **X** = Número de casos favorables**;** y **n** = Número de casos posibles.

d) Evento simple

Es el resultado posible de un experimento, cuya característica es la de no descomponerse en otros casos. Ejemplo, la probabilidad de que caiga hacia arriba el número 4, al lanzar un dado es P = 1 / 6, evento simple porque los números de un dado son 6, y el 4 aparece solo una vez, entonces X = 1 casos favorables y el número de casos posibles es 6, porque n = 6.

e) Evento compuesto

Existe cuando se puede descomponer en varios eventos simples.
Ejemplo: la probabilidad de obtener un número igual o mayor a 4 al lanzar un dado; los números son 4,5 y 6 y su probabilidad esta dada por: 1/6, 1/6 y 1/6 = 3 / 6 que representa 50%, puesto que de 6 números hay 3 que cumplen con este requisito.

f) Eventos imposibles o nulos

Es un evento que no puede ocurrir, su probabilidad es cero: sin un evento "A" es imposible P (A) = 0.
Ejemplo: en una gaveta existen 10 facturas del Almacén Lux, la probabilidad de extraer una factura del Almacén El Faro, es nula o imposible.

$P_x = \frac{0}{10} * 100$

$$\boxed{P(x) = \frac{X}{n} * 100 = 0}$$

Fórmula 38
X = cero

g) Evento cierto o seguro

Si en un evento se verifica P(A) = 1, se denomina evento cierto o seguro. En el ejemplo anterior la probabilidad de extraer una factura del Almacén Lux es la unidad, es decir la certeza absoluta, cualquier factura que se extraiga será del Almacén Lux.

10 casos favorables
10 casos posibles

$P_x = \frac{10}{10} * 100 = 1 \text{ ó } 100\,\%$

$$\boxed{P(x) = \frac{X}{n} * 100 = 1 \text{ o } 100\%}$$

Fórmula 39
El valor de X = al valor de n

Entonces de los eventos anteriores (Imposible o cierto) se concluye que los límites de la probabilidad son 0 y 1, o 0 % y 100 %. Y la probabilidad de un evento varía en ese intervalo, es decir entre estos límites:

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

2. Reglas de probabilidad

2.1 Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si A ∩ B = 0, o sea que no pueden suceder simultáneamente, ∩ = intersección.

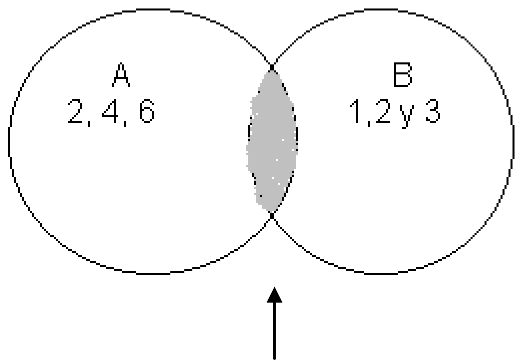
Ejemplo
Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior. Entonces el espacio muestral consiste en los resultados posibles, Em = 1, 2, 3, 4, 5, y 6.

Sea A evento de salir un número par y B evento de salir un número impar se tiene:

Par = 2, 3, 6
Impar = 1, 3, 5.

Entonces A y B son mutuamente excluyentes $A \cap B = 0$

Gráfico 5-2



$\mathbf{A \cap B = 0}$

2.1.1 Regla de la suma o adición para eventos mutuamente excluyentes

$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ **Fórmula 40.** Siempre que $P(A \cap B) = 0$

$P(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$

$P(B) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6$

$P(A \cup B) = 1$

2.2 Eventos independientes

Dos eventos son considerados independientes si los eventos en ningún modo se afectan uno al otro A y B, son eventos independientes cuando la ocurrencia del evento A, no tiene efecto sobre la ocurrencia del evento B y viceversa.

Expresado en símbolos:

P (B / A) = P (B)

(B / A) probabilidad de B habiendo ocurrido A

y P (A / B) = (P (A)

(A / B) Probabilidad de A habiendo ocurrido B.

2.2.1 Regla de la multiplicación para eventos independientes

$$\boxed{P(A\ y\ B) = P(A) * P(B)}$$ **Fórmula 42**

ó P (AB) = P (A) * P (B)

Ejemplo
Una bolsa contiene varios artículos, de los cuales 3 son defectuosos y 2 son buenos. Se extrae un artículo y después se reemplaza. Otro artículo es extraído después del reemplazo. Encontrar la probabilidad de que ambas extracciones sean artículos defectuosos.

Solución: Lo que sucede en la primera extracción no tiene efecto en la segunda, puesto que el segundo artículo es extraído después que el primero es reemplazado. Por tanto las dos extracciones son independientes.

A = Artículo defectuoso
B = Artículo también defectuoso

Tabla 5-2

Artículo	Número
3	3
2	2
Total	**5**

P(A) = 3/ 5; P (B /A) = 3/5; y P (AB) = P (A) * P(B)

P (AB) = 3/5 * 3/5 = 0.36 * 100 = 36.00 %

Puesto que existen 3 artículos defectuosos en la bolsa de 5 artículos:

2.3. Eventos dependientes o condicionales

Si A y B, están relacionados de tal modo que la ocurrencia de B depende de la ocurrencia de A entonces A y B son llamados eventos dependientes o condicionales, se escriben así:

P (A/B) = probabilidad de A habiendo ocurrido B
P (B/A) = probabilidad de B habiendo ocurrido A

Se define como: $P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$ y $P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$

2.3.1 Regla de la multiplicación para eventos dependientes

La probabilidad de que ambos eventos dependientes o condicionales A y B ocurran es:

$$\boxed{P(A \text{ y } B) = P(A)\,P(B/A}$$ **Fórmula 43**

Sí se trata de más de dos eventos se escribe así P(ABC) = P(A) P(B/A) P(C/AB)........

Ejemplo 1
Para los datos del ejemplo de eventos independientes, suponer que el primer artículo defectuoso no es regresado a la bolsa antes de extraer el segundo. Hallar el evento B, artículo defectuoso, condicionado al evento A, también artículo defectuoso;

1º. A defectuosos
2º. B defectuoso

Tabla 5-3

Artículo	No.	P(x)
Defectuoso	3	3/5
Bueno	2	2/5
Total	**5**	**1**

El evento B depende de la ocurrencia del evento A sí el primer artículo extraído es defectuoso la probabilidad que el segundo también lo sea es:

P(A) = 3/5 defectuosos
P(B/A) = 2/4 defectuosos = 0.5 o 50 %; puesto que fué extraído un artículo defectuoso, quedan 4 artículos en total y de estos 2 son defectuosos. Aplicando la fórmula se tiene:

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)} = \frac{6/20}{3/5} = \frac{0.30}{0.6} = 0.5 \text{ o } = 50\ \%$$

Probabilidad conjunta, que ambos sean defectuosos (Fórmula 43)

P(A y B) = P(A) P(B/A) = 3/5 * 2/4 = 6/20 = 0.30

Ejemplo 2, Eventos independientes y dependientes

En la gaveta de un escritorio se encuentran 3 facturas, 5 depósitos monetarios y 10 cheques de caja.

1. Se extraen 3 documentos, después de cada extracción, se devuelven, o sea con reemplazo, hallar las siguientes probabilidades:

a) Que el primero sea factura;
b) Que sea uno de cada documento; y
c) Que el tercero sea depósito monetario, si el primero fué factura y el segundo depósito monetario.

2. Se extraen tres documentos, después de cada extracción no se devuelven, hallar las siguientes probabilidades:

a) Que el tercero sea cheque, sí el primero fue factura y el segundo cheque;
b) Que sea uno de cada documento; y
c) Que el tercero sea cheque de caja, si los dos primeros también lo fueron.

Solución, tomar en cuenta que el inciso b) del numeral 1 así como el inciso también b del numeral 2, se refieren a una probabilidad conjunta, o sea la aplicación de las reglas correspondientes de probabilidad.

Tabla 5-4

Documento	No.
Factura	3
Deposito monetario	5
Cheque de caja	10
Total	**18**

Numeral 1 del ejemplo 2

a) $P(A) = \frac{3}{18} * 100 = 16.67\%$

b) $P(A) = \frac{3}{18}$; $P(B/A) = \frac{5}{18}$; $P(C/AB) = \frac{10}{18}$

Y la probabilidad conjunta ABC, está dada:

$P(ABC) = 3/18 * 5/18 * 10/18 = 150/5832 * 100 = 2.57\%$

c) $P(A) = 3/18$; $P(B/A) = 5/18$ y $P(C/AB) = 5/18 * 100 = 27.78\ \%$

Note que el denominador no varía, en virtud que cada extracción es devuelta nuevamente, o sea con reemplazo.

Numeral 2, del ejemplo 2

a) P (A) = 3/18; P (B/A) = 10/17; y P (C/AB) = 9/16 * 100 = 56.25%

b) P (A) = 3/18; P(B/A) = 5/17 ; P C/AB) = 10/16 * 100; y la probabilidad conjunta P (ABC) = 3/18 * 5/17 * 10/16 = 150/4896 * 100 = 3.06%.

c) P(A) = 10/18; P(B/A) = 9/17 y la probabilidad requerida P(C/AB) = 8/16 * 100 = 50%.

Note que en los eventos condicionales el denominador varía, porque cada extracción no se devuelve.

4. Distribuciones de probabilidad

4.1 Distribución binomial

Es una distribución discreta de probabilidad basada en el desarrollo del binomio; se consideran pruebas repetidas e independientes de un experimento con dos resultados. El desarrollo de un binomio conocido como $(a + b)^n$ es el mismo en el desarrollo de la distribución binomial, únicamente se sustituye a por p y b por q; y además que p tendrá un valor de igual manera q, la suma de los valores de p y q es igual a 1.

Su expresión: $\boxed{(p + q)^n}$ **Fórmula 44**

Donde:
p = Éxito
q = Fracaso
n = Número de pruebas

Sí p = éxito entonces q = 1 – p, y la probabilidad de las distintas probabilidades corresponde al desarrollo del binomio.

4.1.1 Características del desarrollo del binomio

Estas características facilitan el desarrollo de un binomio, que se sustenta en una fórmula matemática.

a) Su desarrollo tiene n+1 términos;
b) p, aparece desde el primer término del binomio con exponente igual a n, disminuyendo su exponente de unidad en unidad en cada término, hasta llegar a exponente 1;
c) q, aparece hasta en el segundo término del desarrollo del binomio elevado a exponente 1, aumentando su exponente de unidad en unidad, en cada término siguiente, hasta llegar a exponente n;

d) En cada término la suma de los exponentes de p y q es igual a n; y
e) El coeficiente de un término cualquiera, del segundo en adelante se obtiene por la fórmula:

$$\text{Coef. Término cualquiera, según-do en adelante.} = \frac{\left(\text{Coef. Término anterior}\right)\left(\text{Exponente de p, en término anterior}\right)}{\text{No. De orden del término anterior}}$$

Ejemplo, desarrollo del binomio:

$(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$

No. De orden	1	2	3	4	5	6

4.1.2 Análisis de las características:

a) Como está elevado a exponente 5, entonces n + 1, tiene 6 términos;
b) p, aparecen en el primer término con exponente 5, disminuye hasta llegar a 1;
c) q, aparece a partir del segundo término con exponente 1, aumentando su exponente en los siguientes términos hasta llegar a 5;
d) La suma de los exponentes en cualquier término es igual a n, en este caso 5, por ejemplo para el cuarto término p^2 y $q^{3,}$ suma de los exponentes 5;
e) El coeficiente de cualquier término a partir del segundo en adelante, el primer término su coeficiente siempre es la unidad, entonces, para encontrar el coeficiente del segundo término por ejemplo, p en el primer término su coeficiente es 1 y su exponente 5 entonces: 1 * 5 = 5, dividido por el número de orden del término que es 1 igual a 5 que es el coeficiente del segundo término

Ejemplo
Según la experiencia de una empresa en sus registros de cobro, 1/5 de ellos tiene error. Si se toma una muestra de 4 facturas hallar las siguientes probabilidades:

a) Que las cuatro tengan error;
b) Que más de tres tengan error;
c) Que más de dos pero menos de cuatro tengan error;
d) Que únicamente una tenga error;
e) Que ninguna tenga error; y
f) Que una y más tenga error.

Es recomendable desarrollar el binomio sin incluir valores, éstos se pueden agregar posteriormente.

$(p+q)\,4 = p^4 + 4(p^3 q) + 6(p^2 q^2) + 4(p q^3) + q^4$

4 E 3 E2,SE 2E,2SE 1E,3SE 4 SE

E = Error y SE = Sin error

p = 0.20 y q = 0.80
$(0.2 + 0.8)^4 = 0.0016 + 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 + 0.4096$

Respuestas:

a) Probabilidad de que 4 sean con error

$p^4 = (02)^4 = 0.0016 * 100 = 0.16\ \%$

b) Probabilidad de que más de 3 tengan error:
$p^4 = (02)^4 = 0.0016 * 100 = 0.16\ \%$

c) Mas de 2 pero menos de cuatro tengan error:

$4p^3q = 4(0.2)^3(0.8) = 0.0256 * 100 = 2.56\ \%$

d) Probabilidad que únicamente una tenga error:

$4pq^3 = 4(0.20)(0.80) = 0.4096 * 100 = 40.96\ \%$

e) Que ninguna tenga error $q^4 = (0.8)^4 = 0.4096 * 100 = 40.96\ \%$

f) Que una y más tengan error

$p^4 + 4(p^3 q) + 6(p^2 q^2) + 4(p q^3)$; sabiendo que la suma de todos los eventos posibles de un experimento es igual a 1, se tiene:

$1 – q = 1 – (q)^4 = 1 – (0.4096) = 0.5904 * 100 = 59.04\ \%$.

g) Probabilidad de que ninguna o lo más dos tengan error:

$q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2 = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728$ ó 97.28 %

h) Escribir la distribución de probabilidad de 0, 1, 2, 3, y 4 facturas sin error

Tabla 5-7

Sin error	**Término**	**Desarrollo**	**P x**
0	p^4	$(0.2)^4$	0.0016
1	$4pq^3$	$4(0.2)(0.8)^3$	0.4096
2	$6p^2q^2$	$6(0.2)^2(q)^2$	0.1536
3	$4p^3q$	$4(0.2)^3(0.8)$	0.0256
4	q^4	$(0.8)^4$	0.4096
Sumatoria	**XX**	**XXX**	**1.0000**

4.1.4 Propiedades de la distribución binomial

a) Media aritmética: $X = np$ **Fórmula 46**

b) Varianza: $S^2 = npq$ **Fórmula 47**

c) Desviación estándar $S^2 = npq$ **Fórmula 48**

f) Coeficiente de variación**:** $CV = \frac{S}{X} * 100$ **Fórmula 49**

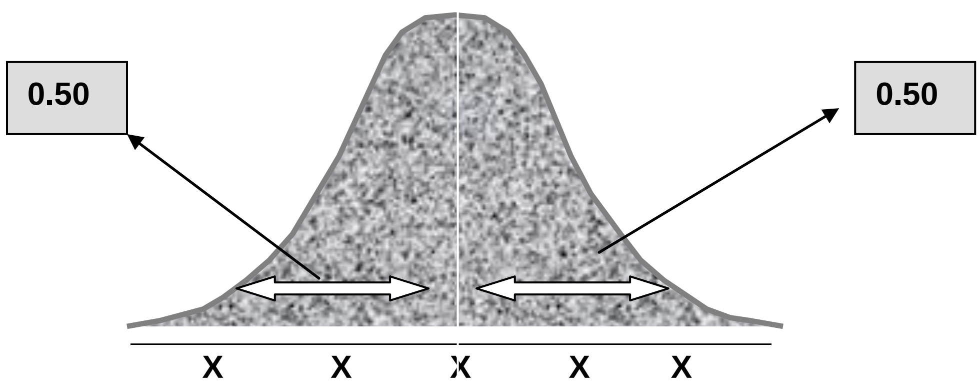
d) Asimetría $A = \frac{q - p}{S}$ **Fórmula 50**

e) Curtosis: $C = 3 + \frac{1 - 6\ (p * q)}{S^2}$ **Fórmula 51**

4. 3 Distribución normal

Es una distribución de probabilidad continua, porque las variables pueden tomar cualquier valor dentro de un rango dado. Es un modelo teórico de probabilidad que se puede aplicar a diferentes fenómenos cuantitativos, así como en el muestreo probabilístico. Su figura gráfica es la siguiente:

Gráfico 5-4



Características:

a) La curva es unimodal, tiene la forma de campana;
b) La media de la población o de la muestra queda en el centro de la curva normal;
c) La media, la mediana y la moda tienen el mismo valor;
d) Las dos colas de la curva se extienden indefinidamente y nunca tocan el eje horizontal, por lo que es asíntota, los valores de X son positivos;
e) El área total de la curva representa 1 o 100 % de los casos y cada mitad es 0.5 o 50 %;
f) El coeficiente de sesgo es 0; y
g) El coeficiente de curtosis es 3.

Para el manejo de las probabilidades de la curva normal existen dos tablas, siendo las siguientes:

4.3.1 Tabla de ordenadas

a) Proporciona el valor relativo o probabilidad de la ordenada máxima, que corresponde a cualquier ordenada que se levante en un punto X situado a cierta distancia de la media aritmética (X), para utilizar la tabla, dicha distancia debe tipificarse así:

$$\boxed{Z = \frac{X - X}{S}}$$ **Fórmula 59**

Donde
Z = Número de desviaciones estándar
X = Valor de la variable
X = Media aritmética
S = Desviación estándar

Z, Indica cuántas desviaciones estándar se separan o desvían de un valor X, respecto a la X, Al centro de la curva o sea para la media aritmética el valor de Z es cero, a la derecha los valores de Z son positivos y a la izquierda negativos.

a) Valor relativo de la ordenada máxima

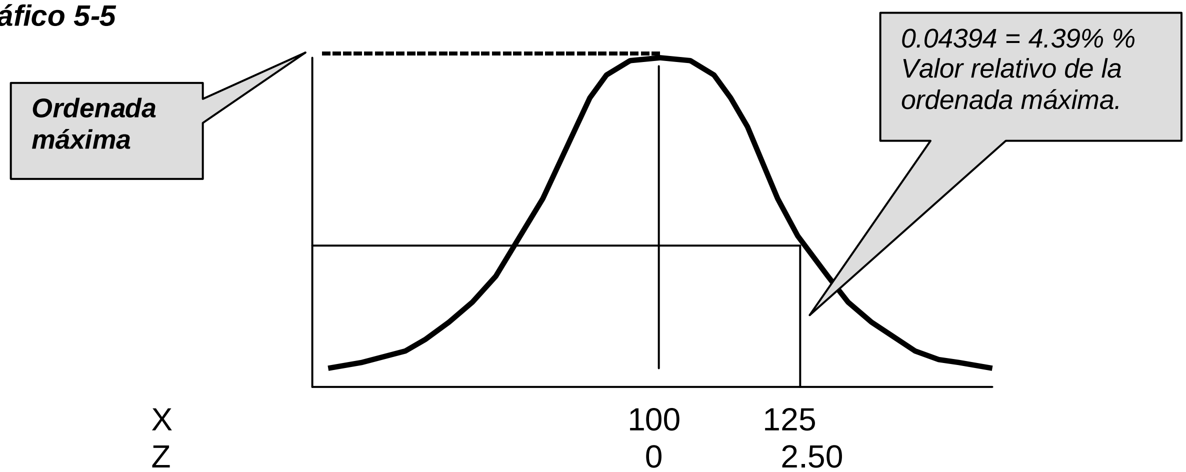
Ejemplo 1
Que porcentaje o probabilidad de la ordenada máxima le corresponde a una Yc, levantada en X = 125, sabiendo que X = 100, S = 10

Primero: $Z_{123} = \frac{125 - 100}{10} = 25/10 = 2.50$

Segundo: El resultado se busca en la tabla de ordenadas (Se omite el signo), la columna Z muestra su valor con un decimal, el segundo decimal se muestra en las columnas de la 0 a la 9.

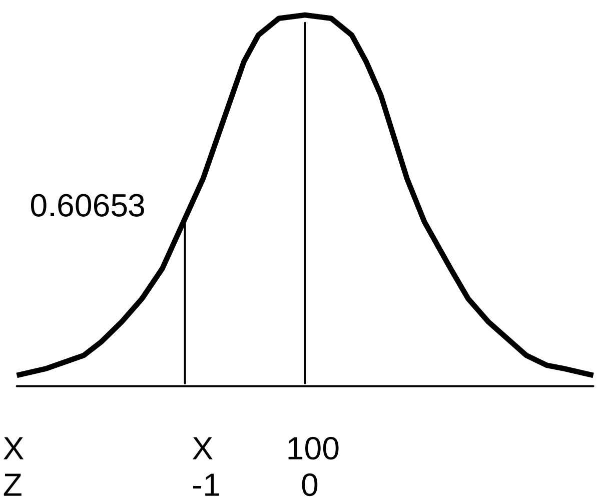
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0										
0.1										
0.2										
.										
2.5	0.04394									
.										
n										

Gráfico 5-5



Ejemplo 2
Que porcentaje de la ordenada máxima, le corresponde a una ordenada levantada en X = 90, sabiendo que X = 100, y S = 10

Gráfico 5-6



$$Z_{90} = \frac{90 - 100}{10} = \frac{-10}{10} = -1$$

Z = - 1, corresponde =.60653...

R: 60.65 %

b) Para encontrar la ordenada

En los ejemplos 1 y 2 se encontró el **valor relativo** de la ordenada máxima que le corresponde a un valor X. En este inciso se encontrará **la ordenada o sea las frecuencias** que le corresponden a un valor X. Primero deberá conocerse la ordenada máxima y luego multiplicarlas por la probabilidad que proporciona la tabla. Para conocer la ordenada máxima se utiliza la fórmula:

$$Y_m = \sqrt{\frac{n\,(i)}{S \quad 2\pi}}$$

Fórmula 60

Donde:

Y_m = Ordenada máxima o "Y" máxima
N = Número de elementos
I = Intervalo constante de clase
S = Desviación estándar
Л = 3.14159

Ejemplo

En 200 llantas para automóvil, el promedio de duración fue de 15 meses con una desviación estándar de 3 meses; la información se agrupó en intervalos con amplitud constante de 3 meses, ajustada a una distribución normal.

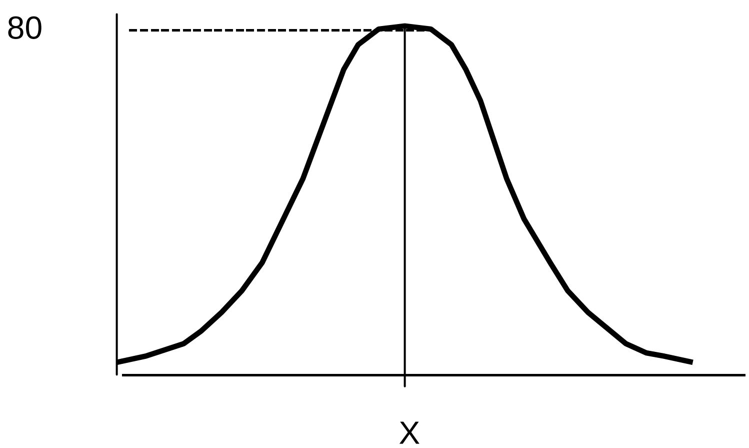
Determinar las ordenadas de las siguientes duraciones (Número de llantas),

a) 8 meses de duración;
b) 17 meses de duración; y
c) 15 meses de duración.

Primero: Identificar los datos: X = 15 meses, n = 200 llantas, S = 3 meses; y i = 3 meses.
Segundo: Cálculo de la ordenada máxima

$$Y_m = \frac{ni}{S\ (2.506628275)} \qquad Y_m = \frac{200\ (3)}{3\ (2.506628275)} = 80 \text{ Llantas.}$$

Gráfico 5-7



Observar que a la media aritmética le corresponde la ordenada máxima.

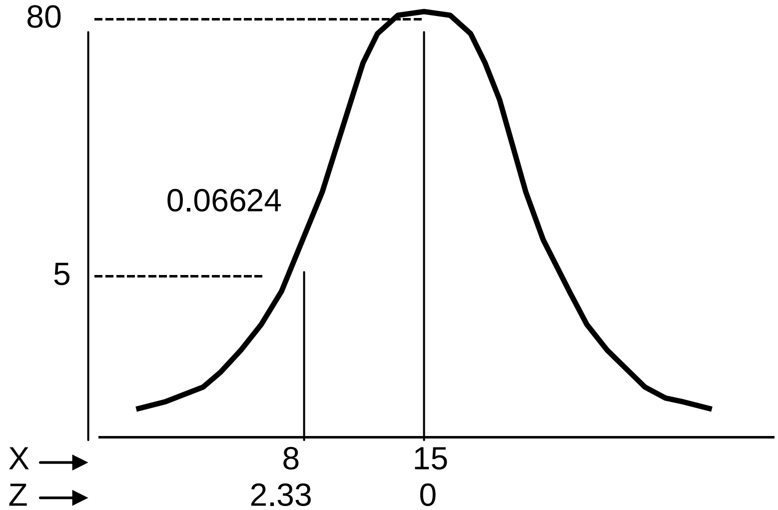
Tercero: Cálculo de Z, por medio de $Z = \frac{X - X}{S}$

a) 8 meses de duración

$$Z_8 = \frac{8 - 15}{3} = \quad = -2.33,$$

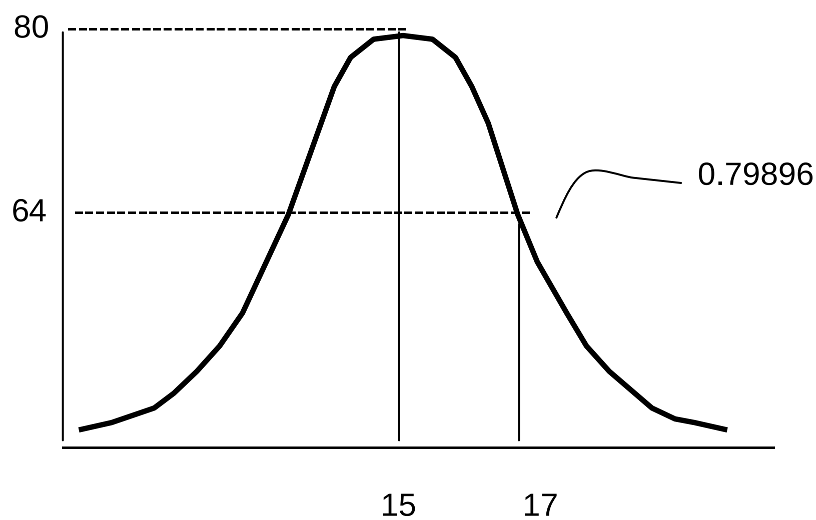
Al valor de Z = 2.33 según la tabla de ordenadas de la curva normal le corresponde 0.06624, de probabilidad, este se multiplica por el valor obtenido para Y_m. Y_c = 80 (0.06624) = 5.30, aproximadamente 5 llantas.

Gráfico 5-8



b) 17 meses de duración: $Z_{17} = \frac{17 - 15}{3} = 0.67$; valor en tabla 0.79896

Gráfico 5-9



Y_c = 80 (0.79896) = 64 casos aproximadamente, (llantas)

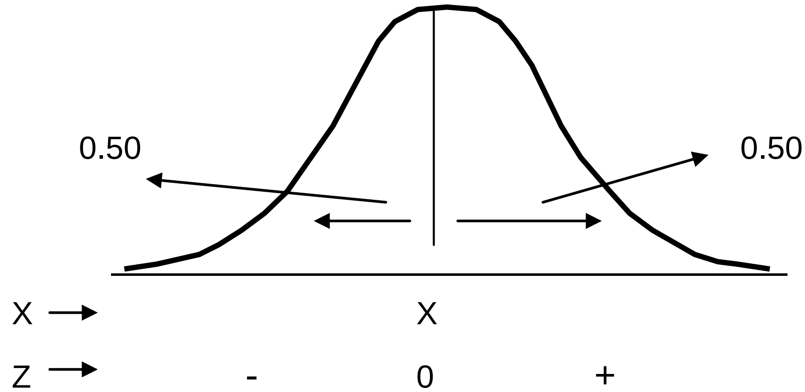
4.3.2 Tabla de áreas

Una parte bajo la curva (Área), se representa en proporciones, sabiendo que su área total es 1 y la mitad es 0.5. La tabla de áreas, señala las probabilidades en términos de Z.

$$Z = \frac{X - X}{S}$$

La probabilidad en términos de Z, está dada del centro de la curva hacia la derecha si Z es positivo, y hacia la izquierda sí Z es negativo, en la tabla se busca Z omitiendo el signo.

Gráfico 5-10



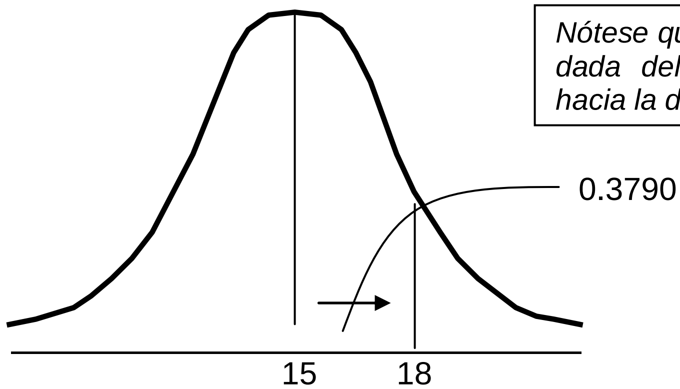
Ejemplo: Para los datos de las 200 llantas, visto con anterioridad, se necesita estimar en 180 llantas compradas por una empresa, las siguientes probabilidades:

a) Que duren entre 15 y 18 meses y cuántas llantas tendrían esa vida útil.

Datos: X = 15 meses, S = 3 meses, i = 3 meses; y n = 180.

Gráfico 5-11

Nótese que la probabilidad está dada del centro de la curva hacia la derecha.



$Z_{18.5}$ = 18.5 – 15 = 1.17, tabla de áreas = 0.3790 o 37.90 %

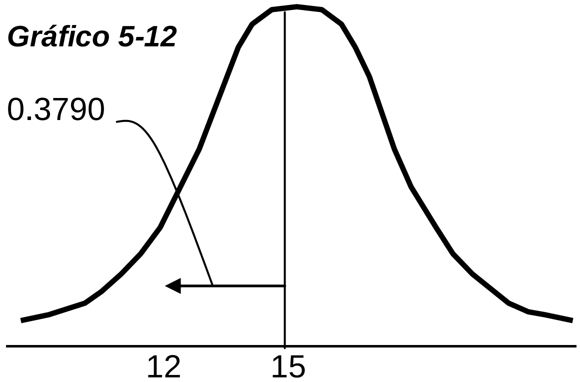
Probabilidad 37.90 %, numero de llantas 180 (0.3790) = 68 llantas.

Tabla 5-9

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0										
0.1										
.										
.										
1.1								0.3790		
.										
N										

b) Que duren entre 12 y 15 meses y cuántas llantas tendrían esa vida útil

Gráfico 5-12

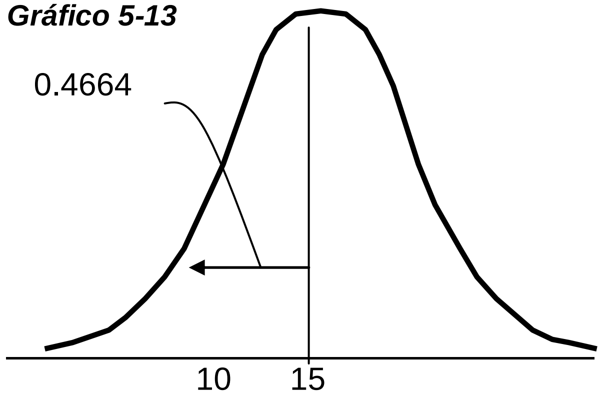


$Z_{11.5} = \dfrac{11.5 - 15}{3} = -1.17$ Tabla 0.3790

R: 37.90 % y número de llantas 68.

c) Probabilidad de duración menor a 10 meses

Gráfico 5-13



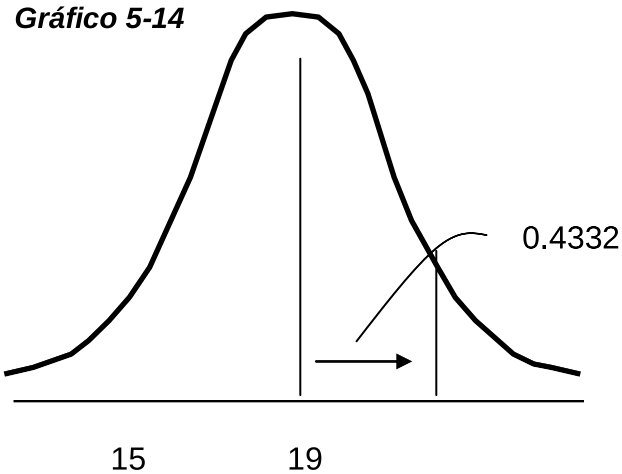
$Z_{9.5} = \dfrac{9.5 - 15}{3} = -1.83$ Tabla 0.4664

0.5 – 0.0464640 = 0.0336

R: 3.36 % y número de llantas 6.

d) Probabilidad mayor a 19 meses

Gráfico 5-14



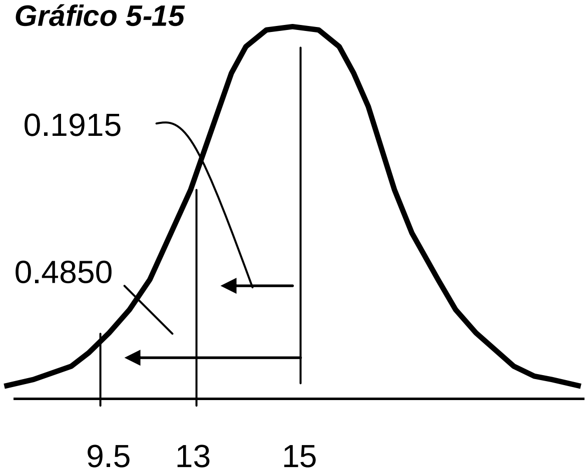
$Z_{19.5} = \dfrac{19.5 - 15}{3} = 1.5$ Tabla 0.4332

0.5 – 0.4332 = 0.0668.

R: 6.68 % y número de llantas 12.

e) Probabilidad entre 9 y 13 meses

Gráfico 5-15



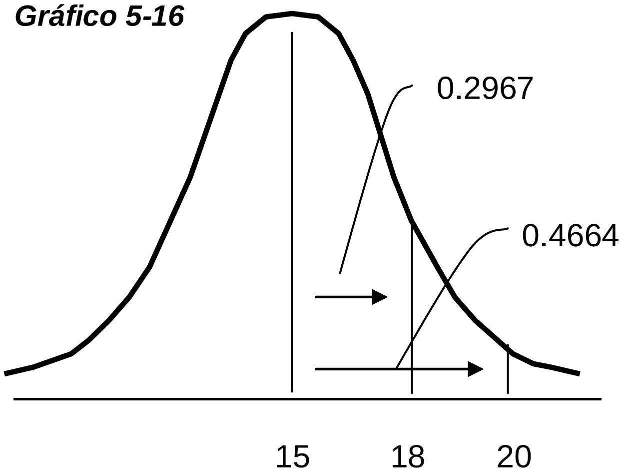
$$Z_{8.5} = \frac{8.5 - 15}{3} = 2.17 \text{ Tabla } 0.4850$$

$$Z_{13.5} = \frac{13.5 - 15}{3} = -0.5 \text{ área: } 0.1915$$

A 0.4850 se le resta el área 0.1915 porque no se necesita, entonces 0.4850 – 0.1915 = 0.2935 R: 29.35 % que representaría 53 llantas.

f) Probabilidad entre 18 y 20 meses

Gráfico 5-16



$$Z_{20.5} = \frac{20.5 - 15}{3} = -1.83 \text{ Tabla } 0.4664$$

$$Z_{17.5} = \frac{17.5 - 15}{3} = 0.83 \text{ Area } 0.2967$$

0.4664 – 0.2967 = 0.1697, R: 16.97 %.